МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ
1 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 1-го курса заочной формы обучения по направлению 09.03.03 Прикладная информатика

Ростов-на-Дону

2022

Составитель: канд. физ.мат. наук, доцент Нурутдинова И.Н.

Приведены варианты заданий контрольной работы для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математический анализ». Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит индивидуальные задания контрольной работы, выполняемых студентами заочной формы. Тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Математический анализ»: дифференциальное исчисление функции одной переменной, исследование функций и построение графиков, функции нескольких переменных, неопределенный интеграл.

Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, правило выбора варианта в соответствии с порядковым номером студента в журнале группы приведено перед заданиями контрольной работы. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к экзамену и рекомендуемая литература.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Правило выбора варианта.

Номер варианта студент выбирает согласно порядковому номеру в журнале группы. Если порядковый номер в журнале больше 20, то номер выбирается сначала, т.е. порядковый номер 21 - номер варианта - 1, порядковый номер 22 - номер варианта - 2 и т.д.

Задание 1. Найти производные 1-го порядка функций *а*), *б*), *в*), *г*). Найти производную 2-го порядка функции *а*).

1	*а*) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x}-2;$	*б*) $S=(4-2\sin t)e^t;$	*в*) $u=\cos^5(4V-1);$	*г*) $z=\frac{\arcsin 2t}{1-4t^2}.$
2	*а*) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+9x^2-\frac{7}{x};$	*б*) $s=\frac{2-\ln t}{1+2\arcsin t};$	*в*) $u=\mathrm{tg}^3(6V+1);$	*г*) $z=e^{-4t^2}(5+\cos 2t).$
3	*а*) $y=x^3-\frac{3}{x^4}+\sqrt[4]{x^9};$	*б*) $s=(4-\cos t)\ln t;$	*в*) $u=\mathrm{arctg}^2\frac{V}{2};$	*г*) $z=\frac{\arccos 3t}{1-9t^2}.$
4	*а*) $y=5x^9+\frac{2}{x^3}+\sqrt[8]{x};$	*б*) $s=\frac{e^t-5t}{t^3};$	*в*) $u=\mathrm{ctg}^4\frac{V}{4};$	*г*) $z=\mathrm{arctg}\frac{t}{3}\ln(9+t^2).$
5	*а*) $y=2x^3-\frac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5};$	*б*) $s=t^3(4+2\mathrm{arctg}t);$	*в*) $u=\ln^3\frac{V}{2};$	*г*) $z=\frac{5-\sin 3t}{e^{2t}}.$
6	*а*) $y=5x^2+\frac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7};$	*б*) $s=(3+\mathrm{tg}t)(1-5\mathrm{ctg}t);$	*в*) $u=\sqrt[3]{1-4V^2};$	*г*) $z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}.$
7	*а*) $y=x^5-\frac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5};$	*б*) $s=(4-3\ln t)(5+2\sin t);$	*в*) $u=\arcsin^3 2V;$	*г*) $z=\frac{4t^3-2e^{3t}}{\cos t}.$
8	*а*) $y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2};$	*б*) $s=(1+t^2)(2-3\mathrm{arcctg}t);$	*в*) $u=\sin^4(2V+3);$	*г*) $z=\frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}.$
9	*а*) $y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6};$	*б*) $s=(t^2-3)(4t+2\ln t);$	*в*) $u=\cos^3(3V+1);$	*г*) $z=\frac{t-\arcsin 3t}{e^{-t}}.$
10	*а*) $y=x^4+\frac{1}{x}-2\sqrt[3]{x};$	*б*) $s=(3t^3-4)(t-2\cos t);$	*в*) $u=\ln^2(5V-3);$	*г*) $z=\frac{1-3\mathrm{tg}\,t}{\mathrm{arctg}2t}.$
11	*а*) $y=2x-\frac{3}{x^4}+4\sqrt{x^3};$	*б*) $s=(3-\cos t)(5+2\sin t);$	*в*) $u=\sqrt{V-3\ln V};$	*г*) $z=\frac{t^3-e^{3t}}{\mathrm{arcos}2t}.$
12	*а*) $y=x^3+\frac{4}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}};$	*б*) $s=(5-3\mathrm{arctg}t)e^t;$	*в*) $u=\mathrm{tg}^4(3V+2);$	*г*) $z=\frac{\ln(4-5t)}{\sin t}.$
13	*а*) $y=3x^2-\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x};$	*б*) $s=(3-2e^t)(6+5e^t);$	*в*) $u=\mathrm{arctg}^3\frac{V}{3};$	*г*) $z=\frac{t-\cos t}{\ln(t^2-1)}.$
14	*а*) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{x^2}-x;$	*б*) $s=(t^2-5\ln t)(t+\ln t);$	*в*) $u=\sqrt{\cos^3 V};$	*г*) $z=\frac{t^2+e^{2t}}{\mathrm{arsin}t}.$
15	*а*) $y=2\sqrt{x}-\frac{4}{x}+3x^2;$	*б*) $s=(e^t-3t^2)\ln t;$	*в*) $u=\sin^3(8V+1);$	*г*) $z=\frac{3^{\sin t}-1}{\mathrm{arctg}\,2t}.$
16	*а*) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x};$	*б*) $s=(6t+\arcsin t)6^t;$	*в*) $u=\ln^2(4V+3);$	*г*) $z=\frac{5+\mathrm{tg}2t}{\cos 2t}.$
17	*а*) $y=\frac{7}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-4x;$	*б*) $s=(3t+2\ln t)\ln t;$	*в*) $u=\mathrm{arctg}^3(2V-1);$	*г*) $z=\frac{\sin(t^2+3)}{e^{-2t}}.$
18	*а*) $y=\frac{x^5}{5}+2\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{x};$	*б*) $s=(7t+\arccos t);$	*в*) $u=\ln^5(1-V);$	*г*) $z=\frac{1-3\mathrm{tg}(t/3)}{\cos(t/3)}.$

19	*а*) $y=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{x}$;	*б*) $s=(e^t-3t^2)\operatorname{tg}t$;	*в*) $u=\sqrt{\arccos 2V}$;	*г*) $z=\dfrac{\ln(t-e^{3t})}{t^4}$.
20	*а*) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{5}\sqrt[5]{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$;	*б*) $s=(t-\arcsin t)\sin t$;	*в*) $u=\operatorname{ctg}^2(3-2V)$;	*г*) $z=\dfrac{\ln(\cos t-1)}{e^{-4t}}$.

Задание 2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	$3\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{4x}\right),\ x_0=1.$	**11**	$\sqrt{1+3x},\ x_0=1.$
2	$2\sqrt[3]{x}+x-3,\ x_0=8.$	**12**	$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{x^2},\ x_0=-2.$
3	$2x+\dfrac{1}{x},\ x_0=1.$	**13**	$\sqrt{x}+2x,\ x_0=4.$
4	$\dfrac{x^2-3}{x},\ x_0=-1.$	**14**	$\dfrac{x^2}{x-2},\ x_0=1.$
5	$\sqrt{5-x^2},\ x_0=1.$	**15**	$\dfrac{1}{x^2}-4\sqrt[3]{x},\ x_0=-1.$
6	$\dfrac{3}{\sqrt{5-x^2}},\ x_0=2.$	**16**	$\dfrac{x^2+3x}{3},\ x_0=-1.$
7	$6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x},\ x_0=1.$	**17**	$x+\dfrac{1}{x},\ x_0=2.$
8	$\dfrac{x^2-2x-3}{4},\ x_0=3.$	**18**	$x^2+e^{3-x},\ x_0=3.$
9	$14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x},\ x_0=1.$	**19**	$\sqrt[3]{1-x^2},\ x_0=3.$
10	$\dfrac{x}{x^2+1},\ x_0=-2.$	**20**	$\sqrt[3]{x^2+4},\ x_0=2.$

Задание 3. Найти пределы, используя элементарные способы раскрытия неопределенностей или правило Лопиталя.

Номер варианта	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$
1	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^2+3}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^3+2x}$.
2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x}{3x^3-2x+1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln(1+x)}$.
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5x^2-x^4}{2x^4-3x^3+1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$;	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$.
4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-2}{2x-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x^3-1}$;	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg}x}$.

5	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^5}{x^3+8}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{1-\cos x}$.
6	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-7x+6}{-3+2x^2+x^4}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arcsin 3x}$;
7	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+x-3}{27x^3+8x-5}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-5x+4}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,2x}{x}$.
8	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x+4}{2x^3-9}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-25}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.
9	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^3}{x^4+8x^2-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-2x-15}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\pi x}{\sin 7x}$.
10	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x+6x^3}{10+2x-3x^3}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x^2+2x-24}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+2x}{\mathrm{tg}\,4x}$.
11	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-8}{5x^4+2x-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+3}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x^2-8x}$.
12	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$;
13	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x^5}{1-4x^3-3x^5}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$.
14	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+4x^2-8}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1}$.
15	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^3-8}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{6x}}{\sin 4x}$.
16	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-x}{2x^4+5x-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$.
17	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-2}{x^3+2x+8}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\mathrm{arctg}\,3x}$.
18	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{5x^4-2x^2+3}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2-9x-10}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{e^{2x}-1}$.
19	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-9x-10}{x^3+1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{-x}-1}{\mathrm{tg}\,5x}$.

20	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x+6}{x^3+8x^2+1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{\arcsin 2x}$.

Задание 4. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	x^3+6x^2+9x+4	**11**	$x^3-9x^2+24x-18$
2	$x^3+6x^2-15x+8$	**12**	$-x^3+9x^2-15x-3$
3	$x^3+12x^2+45x+50$	**13**	$2x^3-15x^2+24x+1$
4	x^3-3x^2-9x-5	**14**	$-x^3+6x^2-9x+2$
5	$x^3+3x^2-24x+28$	**15**	x^3+4x^2-3x-8
6	x^3+3x^2-9x+5	**16**	$-x^3+x^2+5x+3$
7	$x^3-3x^2-24x-28$	**17**	$x^3-12x+5$
8	x^3-6x^2+9x-4	**18**	$2x^3-12x^2+18x-5$
9	$x^3-6x^2-15x-8$	**19**	$x^3-15x^2+48x+3$
10	$x^3-12x^2+45x-50$	**20**	$-5x^3+30x^2-45x+10$

Задание 5. Найти частные производные первого порядка от функций *а*), *б*), *в*) по каждому аргументу. Найти все частные производные второго порядка $Z''_{xx}, Z''_{xy}, Z''_{yx}, Z''_{yy}$ от функции *а*).

№ вар.	$\boldsymbol{Z(x,y)}$ $\boldsymbol{Z'_x=?\ Z'_y=?}$	$\boldsymbol{Z(x,y)}$ $\boldsymbol{Z'_x=?\ Z'_y=?}$	$\boldsymbol{u(x,y,z)}$ $\boldsymbol{u'_x=?\ u'_y=?\ u'_z=?}$
1	$а)\, Z=x^2-4x\sqrt{y}$	$б)\, Z=e^{3x}\cos(2x-y)$	$в)\ u=\operatorname{tg} z\left(x^2-\ln y\right)$
2	$а)\, Z=4xy^3+\sqrt[8]{x^3}$	$б)\, Z=e^{4y}\ln\left(x^2+y\right)$	$в)\ u=y\sin\left(x^2-z\right)$
3	$а)\, Z=2x^3+2\sqrt{xy}-1$	$б)\, Z=\sin 2x\cdot 2^{xy}$	$в)\ u=\left(y^3-2x^3\right)\ln z$
4	$а)\, Z=x\left(x^2-y\right)-\sqrt[3]{y}$	$б)\, Z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\cdot\arcsin\dfrac{x}{y}$	$в)\ u=3^{x-y}\cdot\cos 2z$
5	$а)\, Z=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{2y}{x}$	$б)\, Z=x^2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{xy}{2}\right)$	$в)\ u=e^z\ln\left(x^2-y^2\right)$
6	$а)\, Z=y^2\left(x^3+2y\right)-\dfrac{x}{y^3}$	$б)\, Z=\sqrt{y}\cdot\ln\left(x^2y\right)$	$в)\ u=\left(x^2-e^{3z}\right)\cos 2y$

7	$а) Z = x^5y^{-1} - 3x^2\sqrt{y}$	$б) Z = \left(x^2 + 3y\right)^3$	$в)\ u = \left(x^2 - e^z\right)\cos(xy)$
8	$а) Z = \frac{3}{x^2} - \sqrt[3]{x^2y}$	$б) Z = y\sin^3 2x$	$в)\ u = \left(e^y - z^3\right)\ln 2y$
9	$а) Z = \frac{x^2y}{2} - \frac{x}{y}$	$б) Z = e^x\cos\left(3x + y^2\right)$	$в)\ u = \sqrt{x+3y}\cdot\ln z$
10	$а) Z = \sqrt{xy^3} + x(1-y^2)$	$б) Z = \sqrt{x^3 - \ln y}$	$в)\ u = \left(x - \sqrt{y}\right)e^{2z}$
11	$а) Z = 1 - 2x^2y + \sqrt[4]{xy}$	$б) Z = \left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$	$в)\ u = \left(x^2 - y^2\right)\cos 3z$
12	$а) Z = \frac{1}{3}x^3y^3 - \frac{2}{y}$	$б) Z = \cos^2 x\ln(x-y)$	$в)\ u = e^{-x}\cdot\sin(yz)$
13	$а) Z = x\sqrt{x^3y} - \frac{x^2}{y^2}$	$б) Z = 4^{-y}\,\mathrm{tg}\left(xy^2\right)$	$в)\ u = y^2\cdot\cos(x+3z)$
14	$а) Z = y^3 + 6x\sqrt{y} - 5$	$б) Z = xy\arcsin y$	$в)\ u = \left(y^3 - 2x\right)\ln 3z$
15	$а) Z = x^2 - 3y + y\sqrt[3]{x}$	$б) Z = \sqrt{x^2+y^2}\ln x$	$в)\ u = \left(x^2 + e^{2z}\right)\sin 4y$
16	$а) Z = y(2x-y) + \sqrt[3]{x^2y}$	$б) Z = \left(x - y^2\right)\cos\frac{x}{2}$	$в)\ u = \mathrm{tg}\,x\cdot e^{yz}$
17	$а) Z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$	$б) Z = x^3\mathrm{arctg}\left(y^2 - x\right)$	$в)\ u = z^3\cdot\sqrt{x - 5y^2}$
18	$а) Z = \left(1 - x^2\right)y^3 + \sqrt{y}$	$б) Z = \cos y\cdot\arcsin\frac{y}{x}$	$в)\ u = \mathrm{tg}4x\cdot\ln(y+3z)$
19	$а) Z = \frac{x}{2} - x\left(y^4 + 5\right)$	$б) Z = y\cdot\arccos\frac{y}{x}$	$в)\ u = \sqrt{z}\cdot\cos(x - y^2)$
20	$а) Z = 2xy^3 - \sqrt{x^3y^5}$	$б) Z = 3^{-xy} + \cos^2 x$	$в)\ u = \ln y\cdot\sin(3x+z)$

Задание 6. Дана функция скалярного поля $u = u(x, y, z)$. Найти:
а) градиент функции u точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, модуль градиента и объяснить физический смысл полученного результата;
б) производную функции u в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{s}$.

№ вар.	**$u(x, y, z)$**	**$M_0(x_0, y_0, z_0)$**	$\bar{s}$
1	$u=\sin(xyz)$	$(1, \pi, 1)$	(2; 2; 1)
2	$u=xy^2z$	$(2, 1, 1)$	(1; 2; 2)
3	$u=\ln(x^2+yz)$	$(1, 2, 2)$	(0; 3; 4)
4	$u=\mathrm{arctg}(xyz)$	$(2, 1, 1)$	(2; 1; 2)
5	$u=\sqrt{9-xyz}$	$(1, 1, 5)$	(1; 1; 0)
6	$u=\ln(xy+z^2)$	$(2, 2, 2)$	(3; 0; 4)
7	$u=(3x-1)e^{z+2y}$	$(1, -1, 2)$	(0; 1; 0)
8	$u=x^2y+yz-e^{xy}$	$(0, 2, -1)$	(–3; 0; 4)
9	$u=\mathrm{arctg}(xy)+z^2$	$(1, -1, 2)$	(–1; 1; 2)
10	$u=x^2z+y^2-z^2xy$	$(1, 2, -1)$	(–2; –2; 1)
11	$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$	$(2, 1, 2)$	(4; 3; 0)
12	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$(4, 3, 0)$	(–1; 1; 1)
13	$u=e^{x^2+y^2}(z^2+1)$	$(1, 0, 2)$	(2; –1; –2)
14	$u=e^{xy}(z^2+z)$	$(1, 0, 1)$	(0; –3; 4)
15	$u=\sin(xy)+z^3$	$(\pi, 2, 1)$	(–1; –1;0)
16	$u=x^y+z^2$	$(e, 1, 2)$	(–2; –1; 2)
17	$u=x^2-3y^2+\ln z^2$	$(2, -3, 1)$	(1; 1; 3)
18	$u=(x^2+y^2)e^{z-1}$	$(-1, 2, 1)$	(–3; 0; 4)
19	$u=\cos(x-y)+z^3$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$	(1; –2; 2)
20	$u=(2z+1)e^{x-2y}$	$(2, 1, -1)$	(1; 1; 1)

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию $Z = Z(x, y)$.

№ вар.	Z (x, y)	№ вар.	Z (x, y)
1	$z = x^2 + xy + y^2 - 2y - 5$	3	$z = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2y + 3$
2	$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$	4	$z = \left(x^2 + y\right)e^{\frac{y}{2}}$
5	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$	13	$z = x^3 - y^3 - 3xy$
6	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	14	$z = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{y^2}{2} - 4x - 5y$
7	$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	15	$z = 1 + 2x - 4y - x^2 - y^2$
8	$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$	16	$z = 2xy - 4x - 2y$
9	$z = x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4$	17	$z = x^2 + y^2 + \dfrac{\left(x + 2y - 16\right)^2}{5}$
10	$z = x^2 - 2xy + 4y$	18	$z = \left(y - x\right)^2 + \left(y + 2\right)^2$
11	$z = e^{\frac{x}{2}}\left(x - y^2\right)$	19	$z = xy\left(1 - x - y\right)$
12	$z = x^3 + xy + 6x + y + 1$	20	$z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

Задание 8. Пользуясь таблицей основных интегралов и правилами интегрирования, найти интегралы.

Интегралы	
1 $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2+x^2}{x^3} + 4\sqrt[3]{x^2}\right)dx$	2 $\displaystyle\int\left(\frac{4}{5x^2-1} - \frac{1-x^2}{1+x} + 5e^x\right)dx$
3 $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{5-x}{x^2} - 2\sqrt[4]{x^3}\right)dx$	4 $\displaystyle\int\left(\frac{2}{7x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$
5 $\displaystyle\int\left(\frac{7}{3x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x}\right)dx$	6 $\displaystyle\int\left(\frac{8}{\sqrt{6-x^2}} - 2\sin x + \frac{x^2-25}{x+5}\right)dx$
7 $\displaystyle\int\left(\frac{3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$	8 $\displaystyle\int\left(\frac{2}{4x^2-3} - \frac{3-x^3}{x^4} + 5^x\right)dx$

9 $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$	**10** $\int\left(\frac{5}{6x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$
11 $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$	**12** $\int\left(\frac{6}{3x^2-5}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$
13 $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$	**14** $\int\left(\frac{4}{2-5x^2}+2e^x-\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx$
15 $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$	**16** $\int\left(\frac{12}{3+2x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$
17 $\int\left(\frac{3}{\sqrt{6-x^2}}+\frac{2+x^2}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$	**18** $\int\left(\frac{7}{5x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$
19 $\int\left(\frac{6}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{3x+x^3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^2}\right)dx$	**20** $\int\left(\frac{10}{3-2x^2}+4e^x-\frac{4-x^2}{2-x}\right)dx$

Задание 9. Проинтегрировать подходящей заменой переменного или подведением под знак дифференциала.

№ вар.	**Интегралы**		
1	$\int\cos 4x\,dx$	$\int x(3+x^2)^7\,dx$	$\int\frac{x-3}{x^2+6x+10}dx$
2	$\int e^{5x}\,dx$	$\int\frac{x^2dx}{x^3-3}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+9}}$
3	$\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$	$\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$	$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$
4	$\int\sin\frac{x}{2}dx$	$\int\frac{xdx}{4+x^4}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{10-2x-x^2}}$
5	$\int 10^{2x+1}\,dx$	$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$	$\int\frac{x-2}{x^2+4x+5}dx$

6	$\int \sin(2-3x)dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{2x+5}{x^2-6x+1}dx$
7	$\int e^{1-3x}\,dx$	$\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-x^2}}$
8	$\int \cos 2x\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{15-2x+x^2}}$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$	$\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$	$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+10x+12}}dx$
10	$\int \frac{dx}{5x+3}$	$\int e^{\sin x}\cos x\,dx$	$\int \frac{x-5}{x^2-6x+2}dx$
11	$\int e^{1-5x}\,dx$	$\int \frac{xdx}{2x^2+5}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x-x^2}}$
12	$\int 5^{3x+2}\,dx$	$\int x\sin(x^2-1)\,dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$
13	$\int \cos 9x\,dx$	$\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$	$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+6}dx$
14	$\int \sin 5xdx$	$\int \frac{x^3dx}{x^8+16}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-8x+1}}$
15	$\int e^{9x+2}dx$	$\int \frac{\ln x\,dx}{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{13-2x-x^2}}$
16	$\int \sin 12x\,dx$	$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$	$\int \frac{x+5}{6+10x+x^2}dx$
17	$\int 8^{5x+1}\,dx$	$\int \frac{\cos x\,dx}{7+\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}$
18	$\int \frac{dx}{1-3x}$	$\int \frac{dx}{x\ln x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-7}}$
19	$\int \cos(1-3x)\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$	$\int \frac{dx}{2x^2+6x-9}$
20	$\int \cos(4x+3)\,dx$	$\int \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$	$\int \frac{dx}{3x^2+4x+5}$

Задание 10. Проинтегрировать по частям.

Интегралы	
1 $\int x\sin 3x\,dx$	**2** $\int (2x-1)\ln x\,dx$
3 $\int \left(x-2\right)\cos 2x\,dx$	**4** $\int (3-x)\ln x\,dx$
5 $\int \left(2x+1\right)e^{3x}\,dx$	**6** $\int (6-5x)\ln x\,dx$
7 $\int \left(2x-1\right)\sin 2x\,dx$	**8** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$
9 $\int \left(5x+2\right)\cos 2x\,dx$	**10** $\int \arcsin x\,dx$
11 $\int \left(3-4x\right)e^{x}\,dx$	**12** $\int \arccos x\,dx$
13 $\int \left(6x+1\right)\sin x\,dx$	**14** $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$
15 $\int \left(5-2x\right)\cos 3x\,dx$	**16** $\int x\ln x\,dx$
17 $\int \left(6-5x\right)e^{2x}\,dx$	**18** $\int (4-3x)\ln x\,dx$
19 $\int \left(x+1\right)\sin 4x\,dx$	**20** $\int (3x+2)\ln x\,dx$

КРАТКИЕ ТЕРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Производная функции и её приложения

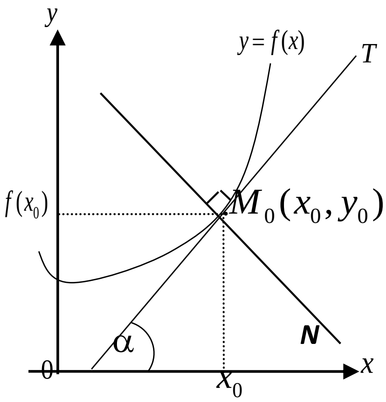
Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0: $f'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\left.y'_x\right|_{x_0}$, $y'(x_0)$ и другие.

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

Механический смысл производной. Если точка движется по закону $S=s(t)$, где S — путь, t — время, то $S'(t)$ представляет скорость движения точки в момент времени t, т. е. $S'(t) = V(t)$.

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \mathrm{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \mathrm{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$c' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u\rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u\rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$	**14**	$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \quad (u > 0)$	**15**	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Замечание 1. Формулы записаны с учётом правила дифференцирования сложной функции.

Замечание 2. Для удобства дальнейшего использования правила дифференцирования и таблица производных приведены в Приложении 1.

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Задание 1. Найти производные 1-го порядка функций *а*), *б*), *в*), *г*). Найти производную 2-го порядка функции *а*).

$$1.1\ а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \mathrm{ctg}^3 \frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\mathrm{arctg} 2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3{\cdot}5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. $t'=1$, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. $v'=1$; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t'=1$, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4{\cdot}2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

1.2 Используя правила I, III, формулу (3) и найдём производную второго порядка $y'' = (y')'$

$$y'' = (15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4})' = 15(x^4)' + \frac{2}{3}(x^{-1/3})' + 12(x^{-4})' = 15\cdot 4x^3 +$$
$$\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 12\cdot(-4)x^{-5} = 60x^3 - \frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} - \frac{48}{x^5}.$$

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0)=y(2)=\sqrt{2^2-3}=1;$

2) $y'(x)=((x^2-3)^{1/2})'=\frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)'=\frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0)=y'(2)=\frac{2}{\sqrt{2^2-3}}=2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y=1+2(x-2)$, или $2x-y-3=0$ — уравнение касательной.

$y=1-\frac{1}{2}(x-2)$, или $x+2y-4=0$ — уравнение нормали.

Краткие сведения из теории пределов функции

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от ε, такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) при $x\to x_0$ ($x\to\infty$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0\right)$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) при $x\to x_0$, ($x\to\infty$), если для любого M>0 найдётся число $\delta>0$, зависящее от M, такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, будет верно неравенство $|f(x)|>M$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\right)$.

Если $\alpha(x)$ есть б. м.ф. при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$), то функция $f(x)=\frac{1}{\alpha(x)}$

является б. б., и обратно, если $f(x)$ б.б.ф. при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является б.м.ф.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то чтобы сравнить их, нужно вычислить предел их отношения. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k.$ Тогда:

при $k = 0$ $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$;

при $0 < k < \infty$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости;

при $k = \infty$ $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$.

Если $k = 1$, то б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую б.м.ф. заменить на эквивалентную.

Примеры эквивалентных б.м.ф. при $\alpha(x) \to 0$:

$$\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim$$
$$\sim \mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim e^{\alpha(x)} - 1 \sim \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\ln a} \sim \ln(1 + \alpha(x)).$$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x = e \text{ или } \lim_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = e.$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const}$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\frac{0}{c}\to 0$; $\frac{c}{0}\to\infty$; $\frac{\infty}{c}\to\infty$; $c\cdot\infty\to\infty$; $c\cdot 0\to 0$; $a^{\infty}\to 0$, если $0<a<1$; $a^{\infty}\to\infty$, если $a>1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0\cdot\infty);\ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Устранить неопределенность можно с помощью алгебраических преобразований или используя правило Лопиталя.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Задание 3. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6};\quad б)\ \lim_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14};\quad в)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\mathrm{tg}5x}.$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\text{ т. к. }\frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4+0}}{\operatorname{tg}(5\cdot0)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(2-\sqrt{4+x})'}{(\operatorname{tg}5x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(4+x)^{-1/2}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos^2 5x}{10\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos^2(5\cdot0)}{10\sqrt{4+0}}=\frac{-1}{20}.$$

Замечание. Если, применив правило Лопиталя, снова получили неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то снова применяем правило до тех пор, пока неопределённость не будет раскрыта.

Задание 4. Построить график функции $y=x^3+3x^2+1,$ используя общую схему исследования функции. Краткие теоретические сведения и образец решения примера сведены в таблицу.

Общая схема исследования и построения графика функции $y = f(x)$

<table>
<tr><th>п/п</th><th colspan="2">Краткие теоретические сведения</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2"><u>Область определения функции (о.о.ф.)</u>. Областью определения D(f) функции $y = f(x)$ называется множество всех $x \in X$ таких, что выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. взяв любое $x \in X$ и подставив в $f(x)$ можно найти соответствующее значение функции $f(x)$</td><td>$y = x^3 + 3x^2 + 1.$
$y = x^3 + 3x^2 + 1$ определена для любого x, т. е. о.о.ф. $D(y) = R$, $x \in R$ или $D(f) = (-\infty; +\infty)$.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2"><u>Область непрерывности функции.</u> Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.
Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элемен-тарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.</td><td>Так как функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ определена на всей числовой оси, то она и непрерывна для любого $x \in (-\infty; +\infty)$.
Точек разрыва нет.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Исследовать функцию на чётность, нечётность.
Функция $y = f(x)$ называется чётной, если $f(-x) = f(x)$, её график симметричен относительно оси OY.
Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если $f(-x) = -f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Остальные функции называются функциями общего вида.</td><td>$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
$f(-x) = (-x)^3 + 3x^2 + 1 \neq f(x)$
$-f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1 \neq f(-x)$
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$— общего вида</td></tr>
<tr><td>4</td><td><u>Определить (если возможно) точки пересечения</u> графика функции с осями координат. Для этого решить системы:
Пересечение с осью OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$;
пересечение с осью OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0. \end{cases}$</td><td colspan="2">$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ x = 0 \end{cases}$ $A(0,1)$
$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 1 = 0.$
решение затруднено, для построения графика необязательно.</td></tr>
</table>

5	**<u>Определить асимптоты графика функции</u>**. Асимптотой кривой $y = f(x)$ называется прямая l, такое, что расстояние точки $(x, f(x))$ от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по кривой от начала координат. Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если x_0 есть точка бесконечного разрыва функции, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{\substack{x \to x_0+0 \\ x_0-0}} f(x) = \pm\infty$. Прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x]$, причем оба предела существуют и конечны.	Т. к. функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}[x^2 + 3x + 1/x] =$ $= (\infty + \infty + 0) = \infty.$ Наклонных асимптот нет.
6	**<u>Определить интервалы монотонности и точки локального экстремума функции</u>**. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на $(a,\ b)$ ($f(x)$□), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на $(a,\ b)$ ($f(x)$□), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) < f(x_1)$. Функция называется монотонной на $(a,\ b)$, если $f(x)$ только □ или только □ на $(a,\ b)$. Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, то $f(x)$□ на $(a,\ b)$. Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, то $f(x)$□ на $(a,\ b)$.	*а*) Определим критические точки: $f'(x) = 3x^2 + 6x$ $f'(x) = 0.\ 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$ $3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \ x_2 = -2$ *б*) о.о.ф. найденными критическими точками разбиваем на интервалы и определяем знак $y'(x)$ внутри каждого

Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (max), [минимума (min)] функции $f(x)$, если существует некоторый интервал (α, β), содержащий точку x_0 такой, что для всех $x \in (\alpha, \beta)$ $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$ $(x \in (\alpha, \beta)\ x \neq x_0)$.

Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 точка локального экстремума непрерывной функции $f(x)$, то её первая производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует.

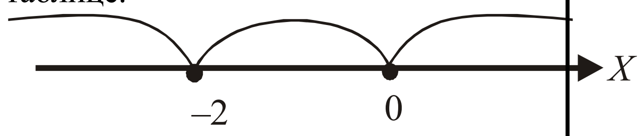
Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*. **Первое достаточное условие экстремума**: если при переходе через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ изменился

с «+» на «–», то в точке x_0 локальный максимум;

с «–» на «+», то в точке x_0 локальный минимум;

если знак $f'(x)$ не изменился, то в точке x_0 экстремума нет.

интервала. Результаты оформим в таблице.



x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0, +\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	□	□ □ max	□	□ □ min	□

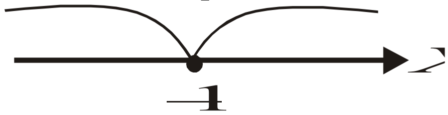
$y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5;$

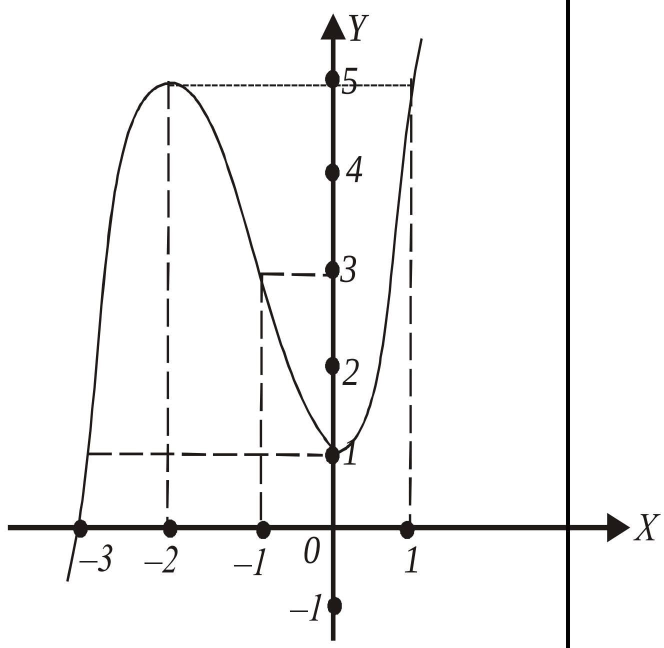
$y_{\min} = y(0) = 1.$

$y'(-3) = 3 \cdot (-3)(-3+2) = 9;$

$y'(-1) = 3 \cdot (-1)(-1+2) = -3;$

$y'(1) = 3 \cdot 1(1+2) = 9 > 0.$

<table>
<tr>
<td>7</td>
<td>Определить интервалы выпуклости функции, точки перегиба
Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх ($\cap$) [вниз $\cup$] на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство:
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]$$
Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются точками перегиба.
Если $f''(x) > 0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вниз ($\cup$) на (a, b).
Если $f''(x) < 0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вверх ($\cap$) на (a, b).</td>
<td>а) Определим точки, подозрительные
на перегиб:
$y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6;$
$y'' = 0.\ \ 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$
б) О.о.ф. найденными точками разбиваем на интервалы, определяем знак $f''(x)$ внутри каждого интервала.

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><u>Необходимое условие перегиба</u>: если x_0 — абсцисса точки перегиба непрерывной функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.
<u>Достаточное условие точки перегиба</u>: пусть $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда если при переходе через x_0 знак второй производной $f''(x)$ изменился, то $(x_0, f(x_0))$ точка перегиба графика функции (при этом $f'(x_0)$ существует).</td>
<td><table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-1)$</td><td>-1</td><td>$(-1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$y(x)$</td><td>$\cap$</td><td>$\cup\cap$</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>
$y_{\text{ïåð}} = y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3;$
$y''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0; y''(0) = 6 > 0.$</td>
</tr>
</table>

8	**<u>Построить график</u>**. Для построения графика можно взять несколько дополнительных точек (–3,1), (1, 5).	

Функция двух переменных, область определения

Переменная величина z называется *функцией двух* независимых *переменных* x и y: $z = f(x, y)$ (или функцией точки $M(x,y)$: $z = f(M)$), заданной на множестве D, если по некоторому закону каждой паре $(x,y) \in D$ (каждой точке $M \in D$) соответствует определенное значение z.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$, или $z = z(x, y)$. Множество D называется *областью определения* функции $f(x,y)$ и обозначается $D(f)$. Она находится из двух условий:

1) В множество D включаются все точки плоскости OXY, где выражение $f(x,y)$ определено, т. е. имеет смысл.

2) Если функция $f(x,y)$ получена для некоторой физической задачи, то учитывается смысл переменных x и y.

Аналогично определяются функции трех и более переменных.

Частные производные функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $M_0(x_0, y_0) \in D$. Дадим аргументу x произвольное приращение Δx и аргументу y — приращение Δy так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Частные приращения функции $f(x, y)$ по переменным x и y равны соответственно:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad y = y_0 = \text{const},$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad x = x_0 = \text{const}.$$

Частными производными функции $z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по x и по y называются пределы вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

Другие обозначения частных производных функции $z = f\left(x, y\right)$:

$$z'_x,\ z'_y \ \text{ или } \ f'_x,\ f'_y, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если необходимо, в скобках указывается точка (x_0, y_0), в которой вычислены частные производные:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \ \text{ или } \ z'_x(x_0, y_0) \ \text{ и т. д.}$$

Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции $f(x, y)$, вычисленная при условии, что $y = \text{const}$. При этом используются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной (табл. 2).

Аналогично, если $u = u(x, y, z)$, то u'_x вычисляют при $y, z = \text{const}$, u'_y — при $x, z = \text{const}$, u'_z при $x, y = \text{const}$.

Задание 5. Найти частные производные первого порядка от функций *а*), *б*), *в*) по каждому аргументу. Найти все частные производные второго порядка $Z''_{xx}, Z''_{xy}, Z''_{yx}, Z''_{yy}$ от функции *а*).

$$а)\, z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}; \quad б)\, z = \sin^2 x \cdot e^{x-y}; \quad в)\, u = \frac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}.$$

Решение.

5.1 $а)\, z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}, \quad z'_x = ? \quad z'_y = ?$

Функцию z запишем в виде, удобном для дифференцирования:

$$z = x^4 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2} = x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2}.$$

Используя правила I, III и формулу 3 из табл. 2, дифференцируем по x, считая y = const:

$$z'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_x - (xy^{-2})'_x = y^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{9}{2}})'_x - y^{-2}(x)'_x =$$
$$= y^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} - y^{-2} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7 y} - \frac{1}{y^2}.$$

Дифференцируем по y (x = const):

$$z'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_y - (xy^{-2})'_y = x^{\frac{9}{2}} (y^{\frac{1}{2}})'_y - x(y^{-2})'_y =$$
$$= x^{\frac{9}{2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - x(-2)y^{-3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^9}{y}} + \frac{2x}{y^3}.$$

б) $z = \sin^2 x \cdot e^{x-y}$.

Используем правило II и формулы 3, 5, 8 из табл. 2, считая $y = \text{const}$:

$$z'_x = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_x = (\sin^2 x)'_x e^{x-y} + \sin^2 x (e^{x-y})'_x = 2\sin x \cos x e^{x-y} +$$
$$+ \sin^2 x e^{x-y}(x-y)'_x = 2\sin x \cos x \cdot e^{x-y} + \sin^2 x e^{x-y} \cdot 1 = \sin 2x e^{x-y} +$$
$$+ \sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

При вычислении z'_y можно использовать правило $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, так как множитель $\sin^2 x$ — постоянная величина при x= const:

$$z'_y = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_y = \sin^2 x (e^{x-y})'_y = \sin^2 x \cdot e^{x-y}(x-y)'_y = \sin^2 x \cdot e^{x-y}(-1) =$$
$$= -\sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

в) $u = \dfrac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}, \quad u'_x = ? \quad u'_y = ? \quad u'_z = ?$

При дифференцировании по x считаем y, z = const, следовательно, у дроби знаменатель постоянный и используем правило $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$:

$$u'_x = \left(\frac{(y^2-2x)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_x = \frac{\left((y^2-2x)^{\frac{1}{2}}\right)'_x}{\cos 3z} = \frac{\frac{1}{2}(y^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(y^2-2x)'_x}{\cos 3z} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(y^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)}{\cos 3z} = -\frac{1}{\cos 3z\sqrt{y^2-2x}}.$$

Аналогично при дифференцировании по y считаем x, z = const:

$$u'_y = \left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_y = \frac{\left(\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y}{\cos 3z} = \frac{\frac{1}{2}\left(y^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y^2-2x\right)'_y}{\cos 3z} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\left(y^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}}2y}{\cos 3z} = \frac{y}{\cos 3z\sqrt{y^2-2x}}.$$

Дифференцируя функцию по z, считаем x, y = const, следовательно, числитель дроби постоянный и можно использовать правило V:

$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$. Имеем:

$$u'_z=\left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_z=-\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos 3z\right)'_z}{\left(\cos 3z\right)^2}=-\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\sin 3z\right)\cdot 3}{\left(\cos 3z\right)^2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{y^2-2x}\sin 3z}{\left(\cos 3z\right)^2}\ .$$

5.2 Найдём частные производные второго порядка от функции *а*):

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\left(\frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{7}{2}}-y^{-2}\right)'_x\ =\frac{9}{2}\left(y^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{7}{2}}\right)'_x-\left(y^{-2}\right)'_x=\frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{7}{2}}\right)'_x-0=$$

$$=\frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}=\frac{63}{4}\sqrt{x^5y}.$$

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left(\frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{7}{2}}-y^{-2}\right)'_y\ =\frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'_y-\left(y^{-2}\right)'_y=\frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}+2y^{-3}=$$

$$=\frac{9}{4}\sqrt{\frac{x^7}{y}}+\frac{2}{y^3}.$$

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+2xy^{-3}\right)'_y\ =\frac{1}{2}\left(x^{\frac{9}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\ \right)'_y+2\left(xy^{-3}\right)'_y=\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y+2x\left(y^{-3}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}+2x(-3)y^{-4}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^9}{y^3}}-\frac{6x}{y^4}.$$

$$z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\left(\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+2xy^{-3}\right)'_x\ =\frac{1}{2}\left(x^{\frac{9}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\ \right)'_x+2\left(xy^{-3}\right)'_x=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{9}{2}}\right)'_x+2y^{-3}(x)'_x=$$

$$=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}+2y^{-3}=\frac{9}{4}\sqrt{\frac{x^7}{y}}+\frac{2}{y^3}.$$

Действительно, смешанные частные производные z''_{xy} и z''_{yx} оказались равными друг другу при $y\neq 0$.

Градиент скалярного поля и производная по направлению

Пусть D некоторая область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если в ней задана функция $u=u\ (x,\ y,\ z)$, то говорят, что в области D задано *скалярное поле*, а функция $u = u\,(x, y, z)$ называется функцией скалярного поля. Например, u — температура в точках $M \in D$ (поле температур), или u — давление жидкости или газа в точках сосуда D (поле давлений). При изучении скалярного поля важно иметь информацию о скорости изменения величины поля в том или ином направлении. Такую информацию дает производная по направлению. Наряду с ней рассматривают в каждой точке $M_0 \in D$ вектор с координатами $\left(u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0)\right)$, называемый *градиентом* функции $u = u\,(M)$ в точке M_0. Вектор градиента обозначается $\operatorname{grad} u(M_0)$:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = u'_x(M_0)\,\overline{i} + u'_y(M_0)\,\overline{j} + u'_z(M_0)\,\overline{k}, \tag{7}$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — единичные векторы декартова прямоугольного базиса.

Вектор grad u (M_0) указывает направление, в котором функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью. Максимальная величина скорости равна:

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{\left(u'_x(M_0)\right)^2 + \left(u'_y(M_0)\right)^2 + \left(u'_z(M_0)^2\right)}. \tag{8}$$

Вектор $\operatorname{grad} u(M_0)$ (если он ненулевой) направлен по нормали к поверхности уровня функции $u = u(M)$, определяемой уравнением $u(x, y, z) = u(M_0)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пусть функция скалярного поля $u = u\,(M)$ определена и

дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0 \in D \subset \mathbb{R}^3$ и $\overline{S}$ — какой-либо фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.

Производной функции $u = u\,(M)$ в точке M_0 в *направлении вектора* $\overline{S}$ называется предел отношения приращения функции u в точке M_0 в направлении вектора $\overline{S}$ $\left(\Delta_{\overline{S}} u = u(M) - u(M_0)\right)$ к расстоянию между точками M и M_0 $\left(\rho(M, M_0)\right)$, когда точка $M \to M_0$ так, что вектор $\overline{M_0 M}$ остается сонаправленным данному вектору $\overline{S}$, т. е.:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\rho(M,M_0)},$$

если этот предел существует и конечен.

Если вектор $\bar{S}$ задан координатами, т. е. $\bar{S}=(S_x,S_y,S_z)$ и функция $u=u$ (M) дифференцируема в точке M_0, то производная по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)=u'_x(M_0)\cos\alpha+u'_y(M_0)\cos\beta+u'_z(M_0)\cos\gamma, \qquad (9)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\bar{S}$. Они равны

$$\cos\alpha=\frac{S_x}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},\ \cos\beta=\frac{S_y}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{S_z}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}}. \qquad (10)$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)$ характеризует скорость изменения функции u (M) в точке M_0 в направлении данного вектора $\bar{S}$. Если $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)>0$, то функция возрастает в направлении $\bar{S}$ со скоростью $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)$; при $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)<0$ функция убывает со скоростью $\left|\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)\right|$.

Задание 6. Дана функция скалярного поля $u=y^2z+3z^2-4xyz$. Найти:

а) градиент функции u точке $M_0(3,1,1)$, модуль градиента и объяснить физический смысл полученного результата;

б) производную функции u в точке $M_0(3,1,1)$ в направлении вектора $\bar{S}=(1,2,-2)$ и объяснить физический смысл полученного результата.

Решение.

а) Найдем частные производные от функции $u(x,y,z)$ и вычислим их в точке M_0:

$$u'_x=\left(y^2z+3z^2-4xyz\right)'_x=-4yz, \qquad u'_x(M_0)=(-4yz)\big|_{(3,1,1)}=-4,$$

$$u'_y=\left(y^2z+3z^2-4xyz\right)'_y=2yz-4xz,\qquad u'_y\left(M_0\right)=\left(2yz-4xz\right)\Big|_{(3,1,1)}=-10,$$

$$u'_z=\left(y^2z+3z^2-4xyz\right)'_z=y^2+6z-4xy,\quad u'_z\left(M_0\right)=\left(y^2+6z-4xy\right)\Big|_{(3,1,1)}=-5.$$

Применяя формулы (7), (8), получаем:

$$\operatorname{grad} u\left(M_0\right)=-4\bar{i}-10\bar{j}-5\bar{k},$$

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right|=\sqrt{(-4)^2+(-10)^2+(-5)^2}=\sqrt{141}.$$

Вывод. Заданная функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью, равной $\sqrt{141}$, в направлении вектора $\operatorname{grad} u\left(M_0\right)=$ $=(-4,-10,-5)$.

б) Определим модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{S}=(1,\,2,\,-2)$ по формулам (10):

$$\left|\bar{S}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\qquad \cos\beta=\frac{2}{3},\qquad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Применяя формулу (9), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(M_0\right)=-4\cdot\frac{1}{3}+(-10)\cdot\frac{2}{3}+(-5)\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{-4-20+10}{3}=-\frac{14}{3}.$$

Вывод. Функция в точке M_0 в направлении вектора $\bar{S}$ убывает со скоростью $\frac{14}{3}$ единиц скорости.

Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=Z(x,y)$ определена в некоторой области D и $M_0\left(x_0,y_0\right)$— внутренняя точка области.

Точка $M_0\left(x_0,y_0\right)$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $z=Z(x,y)$, если существует окрестность точки M_0

такая, что для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$Z(x_0,y_0) \ge Z(x,y) \qquad \big(Z(x_0,y_0) \le Z(x,y)\big).$$

Точки (локального) максимума и минимума функции называются точками *экстремума*.

Необходимое условие экстремума дает следующая теорема.

Теорема. Пусть (x_0,y_0) — точка экстремума дифференцируемой функции $z = Z(x,y)$. Тогда частные производные

$$Z'_x(x_0,y_0) = 0 \text{ и } Z'_y(x_0,y_0) = 0. \qquad (11)$$

Другими словами, $\operatorname{grad} Z(M_0) = \overline{0}$.

Точку M_0, в которой выполнены условия (11), называют *стационарной* точкой функции.

Экстремум функции возможен не только в её стационарных точках, но и в таких точках, в которых $\operatorname{grad} Z$ не существует, т. е. не существует хотя бы одна из частных производных Z'_x или Z'_y. Такие точки вместе со стационарными называются *критическими* точками функции.

Не любая критическая точка функции является точкой экстремума. Следующая теорема устанавливает достаточные условия экстремума функции в стационарной точке.

Теорема. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ — стационарная точка функции $Z(x,y)$, т. е. $Z'_x(M_0) = 0$ и $Z'_y(M_0) = 0$, и в некоторой окрестности этой точки все частные производные второго порядка функции $Z(x,y)$ непрерывны.

Обозначим:

$$A = Z''_{xx}(M_0),\ B = Z''_{xy}(M_0),\ C = Z''_{yy}(M_0),\ \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (12)$$

Тогда:

1) если $\Delta(M_0) > 0,$ то в точке M_0 функция имеет экстремум: минимум, если $A > 0$, и максимум, если $A < 0$;

2) если $\Delta(M_0) < 0,$ то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta(M_0) = 0,$ то вопрос о наличии экстремума требует дополнительного исследования (назовем случай $\Delta = 0$ неопределенным).

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) определить критические точки функции в ее области определения, т. е. точки, в которых частные производные Z'_x и Z'_y равны нулю или не существуют;

3) определить частные производные второго порядка;

4) проверить выполнение достаточных условий экстремума (12) для каждой стационарной точки;

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - x^2 y - xy^2$.

Решение. Исследование функции $Z(x, y)$ на экстремум проводим согласно вышеуказанному алгоритму.

1. Область определения функции $z = 2xy - x^2 y - xy^2$ — вся плоскость *OXY*.

2. $z'_x = \left(2xy - x^2 y - xy^2\right)'_x = 2y - 2xy - y^2;$

$z'_y = \left(2xy - x^2 y - xy^2\right)'_y = 2x - x^2 - 2xy.$

Обе частные производные определены для любых (x, y). Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, могут быть только стационарные точки. Определим их из условий $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} z'_x = 2y - 2xy - y^2 = 0, \\ z'_y = 2x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y(2 - 2x - y) = 0, \\ x(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим координаты стационарных точек:

$M_0\,(0,\,0)$; $M_1\,(0,\,2)$; $M_2\,(2,\,0)$; $M_3\,(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3})$.

3. $z''_{xx} = (2y - 2xy - y^2)'_x = -2y, \quad z''_{xy} = (2y - 2xy - y^2)'_y = 2 - 2x - 2y,$

$z''_{yx} = (2x - x^2 - 2xy)'_x = 2 - 2x - 2y, \quad z''_{yy} = (2x - x^2 - 2xy)'_y = -2x.$

4. Точка $M_0\,(0,\,0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_0} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_0} = 2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_0} = 0,$$

$$\Delta(M_0) = AC - B^2 = 0 - 2^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_0(0,\,0)$ данная функция экстремума не имеет.

Точка $M_1\,(0,\,2)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_1} = -4,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_1} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_1} = 0,$$

$$\Delta(M_1) = AC - B^2 = -4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0.$$

В точке $M_1\,(0,\,2)$ функция экстремума не имеет.

Точка $M_2\,(2,\,0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_2} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_2} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_2} = -4,$$

$$\Delta(M_2) = AC - B^2 = 0 \cdot (-4) - (-2)^2 = -4 < 0.$$

В точке $M_2\,(2,\,0)$ экстремума нет.

Точка $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_3} = -\frac{4}{3},\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_3} = -\frac{2}{3},\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_3} = -\frac{4}{3},$$

$$\Delta(M_3) = AC - B^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} > 0.$$

В точке M_3 функция имеет экстремум, так как $A = -\frac{4}{3} < 0$, то $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — точка максимума функции.

5. $z_{\max} = z\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$

Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C,$ где C — const .

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где $F'(x) = f(x), C$ — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2. $\int dF(x) = F(x) + C;$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов приведена в Приложении 2. Каждая из формул таблицы справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Задание 8. Пользуясь таблицей основных интегралов (Приложение 2) и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\}=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-$$

$$-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=$$

$$=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Метод замены переменной

Теорема. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Среди интегралов, вычисляемых с помощью замены переменной, выделим интегралы вида:

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx \qquad \text{и} \qquad \int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

При их вычислении необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, для чего используется стандартная замена:

$$x=t-\frac{b}{2a},\ dx=dt,\ t=x+\frac{b}{2a}. \qquad (2)$$

Задание 9. Проинтегрировать подходящей заменой переменной (подведение под знак дифференциала).

$$а)\ \int\cos 4x dx;\ \ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ \ в)\int x(2-x^2)^5dx;\ \ г)\ \int\frac{x-2}{x^2+6x+10}dx.$$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

$$г)\ \int \frac{x-2}{x^2+6x+10} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Используем замену (2),} \\ \text{учтем, что } a=1,\ b=6 \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{l} x = t-3 \\ dx = dt \\ t = x+3 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t-3-2}{(t-3)^2+6(t-3)+10} dt = \int \frac{t-5}{t^2-6t+9+6t-18+10} dt = \int \frac{t-5}{t^2+1} dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} -$$

$$-5\int \frac{dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l} \text{для 1-го интеграла} \\ z = t^2+1 \\ dz = 2tdt;\ tdt = \dfrac{dz}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - 5\int \frac{dt}{t^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{формулы 4, 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\ln|z| -$$

$$-5\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 5\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 5\operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

Интегрирование по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx \to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx \to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx \to V=\frac{1}{k}e^{kx}$
Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$ $\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$ $\int \arccos kx\,P_n(x)dx$ $\int \mathrm{arctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\frac{dx}{x}$ $U=\arcsin kx \to dU=\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ $U=\arccos kx \to dU=-\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ $U=\mathrm{arctg}\,kx \to dU=\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$

$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$ $n=0,1,2,...$	$U=\operatorname{arcctg} kx \to dU=-\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 10. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2x dx;$ *б*) $\int (1+2x)\ln x dx.$

Решение.

$$а)\ \int (3x-1)\sin 2x dx=\left|\begin{array}{l} U=3x-1\to dU=3dx \\ dV=\sin 2x dx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int \frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int \cos 2x dx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln x dx=\left|\begin{array}{l} U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=(1+2x)dx\to \\ V=\int (1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int (x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int (1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

Раздел 3. Введение в анализ

1. Функция одной переменной, способы задания. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция.
2. Предел функции.
3. Бесконечно малая функция и ее свойства.
4. Бесконечно большая функция, связь с бесконечно малой.
5. Основные теоремы о пределах функции (критерий существования предела, единственность, предел суммы, произведения, частного).
6. Первый и второй специальные пределы.
7. Сравнение бесконечно малых функций.
8. Непрерывность функции в точке, на интервале, отрезке. Основные теоремы о непрерывных функциях (непрерывность основных элементарных функций, сложной функции).

9. Свойства функций непрерывных на замкнутом отрезке, абсолютный экстремум функции.

Раздел 4. Производная функции одной переменной

1. Приращение аргумента и приращение функции. Задача о касательной к плоской кривой.
2. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.
3. Необходимое условие дифференцируемости функции.
4. Основные правила и формулы дифференцирования.
5. Дифференциал функции, его геометрический смысл, свойства, применение к приближенным вычислениям.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Раздел 5. Приложения производной

1. Теоремы Ролля, Лагранжа.
2. Монотонность функции, достаточное условие монотонности.
3. Определение локального максимума (минимума) функции, экстремума функции.
4. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, непрерывной функции.
5. Первый и второй достаточный признак экстремума.
6. Абсолютный экстремум функции на отрезке.
7. Выпуклость функции, точки перегиба. Достаточное условие выпуклости функции.
8. Достаточное условие точки перегиба. Необходимое условие.
9. Асимптоты графика функции вертикальные, наклонные.
10. Правило Лопиталя.

Раздел 6. Функции нескольких переменных (ФНП)

1. Определения функций 2-х, 3-х и n переменных, область определения и способы задания.
2. График функции 2-х переменных. Линии и поверхности уровня.
3. Предел и непрерывность ФНП.
4. Частные и полные приращения функции 2-х переменных. Частные производные, их геометрический смысл.
5. Скалярное поле, его эквипотенциальные поверхности. Производная по направлению.
6. Градиент функции скалярного поля. Теорема о проекции вектора градиента на направление.
7. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных.
8. Экстремум функции двух переменных, его необходимое условие (теорема).
9. Достаточные условия экстремума функции двух переменных (теорема).

Раздел 7. Неопределенный интеграл (НИ)

1.Первообразная. Теорема о первообразной. НИ, его геометрический смысл.
2. Свойства НИ.
3. Таблица основных интегралов.
4. Теорема о замене переменной в НИ.
5. Интегрирование по частям в НИ.

Учебно-методические материалы и программно-информационное обеспечение

№ п/п	Автор	Название	Издатель-ство	Год издания	Вид издания	Адрес электронного ресурса	Вид доступа
1	2	3	4	5	6	8	9
1.1	Бермант А.Ф., Арамановић И.Г.	Краткий курс математического анализа	СПб: Лань	2008	Учебное пособие		
1.2	Владимирский Б.М., Горстко	Математика общий курс	СПб: Лань	2008	учебник		
1.3	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1	М.: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
1.4	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2	М.: ОНИКС: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
2.1	Шипачёв В.С.	Высшая математика	М: Юрайт	2011 2012	Учебное пособие		
2.2	Виленкин И.В.	Высшая математика: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.3	Виленкин И.В.	Высшая математика: интегралы по мере, дифференциальные уравнения, ряды	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.4	Кузнецов Б.Т	Математика	М.: ЮНИТИ-	2012	учебник	http://iprbooksh	С любой точки

			ДАНА			op.ru	доступа для авторизованного поль-зователя
2.5	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.1	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2012	Учебное пособие		
2.6	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.2	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Учебное пособие		
2.7	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.3	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Учебное пособие		
6.2.10	Полтинников В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.4	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2015	Учебное пособие		
2.8	Пожарский Д.А., Нурутдинова И.Н.	Избранные главы математики: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Учебное пособие		
2.9	Нурутдинова И.Н., Соболев В.В.	Сборник образцов решения заданий базового уровня по дисциплине «Математика»	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Учебное пособие	ntb.donstu.ru	С любой точки доступа для авторизованного поль-зователя
3.1		Сайт Math Высшая математика. Решение задач и примеров – online				http://www.math-pr.com/index.html	С любой точки доступа
3.2		Сайт Решение задач по математике online				http://www.reshmat.ru/index.html	С любой точки доступа

Приложение 1

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$c' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$	**14**	$(\text{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Замечание. Формулы записаны с учётом правила дифференцирования сложной функции.

Приложение 2

Таблица основных интегралов

№ п/п	c = const, x – независимая переменная, $u=u(x)$	№ п/п	c = const, x – независимая переменная, $u=u(x)$
1.	$\int 0du = C; \quad C = \text{const};$	10.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg}u + C;$
2.	$\int du = u + C;$	11.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$
3.	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C;$
4.	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C;$	13.	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{u}{a} + C;$
5.	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$	14.	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C;$
6.	$\int e^u du = e^u + C;$	15.	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|\text{tg}\frac{u}{2}\right\| + C;$
7.	$\int \cos u\, du = \sin u + C;$	16.	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|\text{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C;$
8.	$\int \sin u\, du = -\cos u + C;$	17.	$\int \text{tg}u\, du = -\ln\|\cos u\| + C;$
9.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}u + C;$	18.	$\int \text{ctg}u du = \ln\|\sin u\| + C.$